グラフ・マイナーの定理

蒲原純 (KAMOHARA Jun)*

2017 年 3 月 16 日

1　単純グラフ

1.1　グラフや部分グラフの定義

集合 V に対し, その部分集合で n 個の元を持つもの全体の集合を $[V]^n$ と表す. また, 有限部分集合の全体を $[V]^{<\omega}$ と表す. この時,

$$\begin{aligned} [V]^0 &= \{\emptyset\} \\ [V]^1 &= \{\ \{x\} \mid x \in V\} \\ [V]^2 &= \{\ \{x,y\} \mid x,y \in V,\ x \neq y\} \\ [V]^{<\omega} &= \textstyle\bigcup_{i\geq 0}[V]^i \end{aligned} \tag{1}$$

などとなる. なお, $x \mapsto \{x\}$ の対応により, $V \subseteq [V]^{<\omega}$ とみなすことがある.

定義 1.1 (単純グラフ)**.** 集合 V(頂点集合) と $[V]^2$の部分集合 E(辺集合) の組 $G = (V,E)$ を**単純グラフ**, あるいは単に**グラフ**という.(通常 V は有限集合を考え, V を無限とするときは,G は無限グラフという.)

- $v \in V$ を G の頂点という.
- $e = \{a,b\} \in E$ を G の辺といい,$e = ab$ や ba と略記する.
- 辺に向きはないことに注意.つまり $ab \in E$ と $ba \in E$ は同じことを表す.
- グラフ G に対し, その頂点集合を $V(G)$,辺集合を $E(G)$ と表す.
- $V(G)$ の元の個数を G の**位数**と呼び $|G|$ と表す.

グラフ G において a が頂点,e が辺の時, 厳密には $a \in V(G)$ や $e \in E(G)$ と書くべきところを, 単に $a \in G, e \in G$ と書くことがある. G の 2 頂点 a,b に対し辺 ab が存在する時 a と b は G で**隣接している**と言う.

定義 1.2 (準同型写像)**.** グラフ $G = (V,E)$, $G' = (V',E')$ に対し,写像 $\phi : V \to V'$で, $ab \in E$ なら $\phi(a)\phi(b) \in E'$を満たすものを G から G'へのグラフ準同型写像といい, $\phi : G \to G'$とかく.

準同型写像は, その性質から, 辺集合間の写像も定める.つまり $G \ni e = ab \mapsto \phi(a)\phi(b) \in G'$. 任意のグラフには $V(G) \ni x \mapsto x$ で定まるグラフ準同型が存在する.これを 1_Gとおく. また 2 つのグラフ準同型 $\phi : G \to G', \psi : G' \to G''$ がある時, 合成して $\psi\phi : G \to G''$ を得る. グラフの同一性は次のように判定する.

---

* 阪ゼミ (https://sites.google.com/site/ouvsemi/)

定義 1.3 (同型写像)**.** グラフ準同型写像$\phi : G \to G'$は,写像$\psi : G' \to G$ が あって,$\phi\psi = 1_{G'}, \psi\phi = 1_G$ を満たすとき,ϕを G から G'へのグラフ同型写像という.

この条件は結局,ϕ が全単射であって, $xy \in E(G) \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y)$ というのに等しい. 2 つのグラフ G と G' の間に同型写像が存在する時, その 2 つは同型なグラフであるといい, $G \simeq G'$, あるいは単に $G = G'$ とかく. 以後しばしば同型なグラフ同士を区別しない. (あえて区別するときはその都度断る.)

定義 1.4 (頂点の次数)**.** G の頂点 v に対しそれが属する G の辺の総数を v の次数といい $d(v)$ と表す.すなわち $d(v) = \#\{e \in E(G) | v \in e\}$

定義 1.5 (部分グラフ)**.** グラフ $G = (V, E)$ の部分グラフとは,グラフ $H = (V', E')$ で,$V' \subseteq V, E' \subseteq E$ を満たすものを言う.H が G の部分グラフの時,集合と同様に,$H \subseteq G$ などと書く.

グラフ G 自身はグラフ G の部分グラフである.実際に頂点集合が包含されていなくても,部分グラフと同型であれば,部分グラフということも多い.以下でいくつか G の部分グラフを定義する.

定義 1.6 (道)**.** 次のように表せるグラフ $P = (V, E)$ を道という.

- $V = \{\ x_0, ..., x_n\ \}(n \geq 0, x_i$はすべて異なる.)
- $E = \{\ x_0x_1, ..., x_{n-1}x_n\ \}$

n(すなわち辺の個数) のことを P の**長さ**という.長さ n の道は P^nと表す.また,G の部分グラフで P と同型なものを G の道という.

道 P は,定義に出てきた頂点の並びを用いて $P = x_0...x_n$と表す. $n > 0$ ならばこの表現は $x_0...x_n$と $x_n...x_0$ の 2 通りある. $P = x_0...x_n$が G の道であるとき,x_0, x_nを P の**端点**, $x_1, ..., x_{n-1}$ を**内点**という. 長さは結局 P に含まれる辺の数のことである. 頂点 $x \in V$ はそれ自体長さゼロの道であり, 辺は長さ 1 の道である.(正確には頂点や辺を部分グラフとみなしたものがそうである.) 二つの頂点 a, b に対し,$a = x_0, b = x_n$なる道は ab 道と呼ばれる. $a = b$ の時,ab 道は $P = (a, \emptyset)$ ただ一つである. 長さ n の道は全て同型で,P^nと書く.

定義 1.7 (AB 道)**.** $V(G)$ の二つの部分集合 A, B に対し,AB 道とは,道 P であって,次の条件を満たすものを言う.

(条件) $P = x_0...x_n$とかけて,$V(P) \cap A = \{x_0\}, V(P) \cap B = \{x_n\}$.

大雑把に言うと, 端点が A と B に 1 つづつあって, 内点は Aにも B にも入っていないような道であるが,A と B が共有点を持つときは微妙な状況が発生する. 例えば $x \in A \cap B$ の時,x を端点とする AB 道は長さゼロ $P = x$ ただ一つである.実際,$P = x_0...x_n$で $x_0 = x$ と置くと,$x \in B$ なので $x \in V(P) \cap B = \{x_n\}$ より,$x = x_n$.よって $n = 0$.

定義 1.8 (閉路)**.** 次のように表せるグラフ $C = (V, E)$ を閉路という

- $V = \{\ x_0, ..., x_{n-1}\ \}(x_i$は全て相異なり,$n \geq 3)$
- $E = \{\ x_0x_1, ..., x_{n-1}x_0\ \}$

n(辺の数) を C の長さという.長さ C の閉路は C^nと書かれる.G の部分グラフで C と同型なものは,G の閉路と呼ばれる.

閉路も道と同様に $x_0...x_{n-1}x_0$のように表す．閉路 $C = x_0...x_{n-1}x_0$がある時,n をその長さという.これも道と同様 C に含まれる辺の個数である.閉路の長さは 3 以上である.

命題 1.9. 次数が 1 以上である一つの頂点を除いて最低次数が 2 以上の空でないグラフは少なくとも一つの閉路を持つ.

Proof. 次数が 1 以上の頂点の一つを x_0 とすると定義より, それは少なくとも一つ辺を出している. その辺を x_0x_1とし,x_1 からさらにそれとは別の辺を取る.($d(x_1) \geq 2$ なので可能.) これを繰り返して列 $x_0, x_1, x_2, ...$ を考えると, 頂点は有限個なので, いつか同じものが出現する.(ただし隣接する 3 つは全て互いに異なる.) よって $i + 2 < j$ で $x_i = x_j$なる i, j が存在する. その時, $x_ix_{i+1}...x_j$ は閉路となる. □

道は部分グラフであるという性質のため, 少し扱いにくいことがあり, より柔軟な次の概念が便利なことがある.

定義 1.10 (歩道)**.** グラフ G において,次の条件を満たす点列 $x_0...x_n$を長さ n の歩道という.
(条件) $x_{i-1}x_i \in E(G)(i = 1, ..., n)$
$x_0 = x_n$なる歩道 $x_0...x_n$はサイクルと呼ばれる.

命題 1.11. $x_0...x_n$ が歩道の時,$x_0 \neq x_n$, すなわちサイクルでないなら, 必要ならばいくつか点を除去して,x_0x_n 道を得る．すなわち,$0 \leq i_0 < ... < i_k \leq n$ で各辺 $x_{i_k}x_{i_{k+1}}$ が歩道に含まれ, $x_{i_0}...x_{i_k}$が x_0x_n 道となる.

Proof. $i_0 = \max_{x_i = x_0} i$ とする. 仮定より,$i_0 < n$. 次に $i_1 = \max_{x_i = x_{i_0+1}} i$ とする．これを $i_k < n$ の間くり返して, 列 $x_{i_0}...x_{i_k}$ を得る．これが求める x_0x_n 道になっている. □

定義 1.12 (誘導部分グラフ)**.** グラフ G とその頂点からなる集合 V'に対し,頂点集合を V',辺集合を $E' = \{e \in E | e \subseteq V'\}$ とする G の部分グラフを V' **が誘導する** G **の部分グラフ**という．$V(G)$ のある部分集合に誘導される G の部分グラフを, 単に G の誘導部分グラフという.

すなわち,G'が G の誘導部分グラフであるとは,G の部分グラフであって, 所属する任意の 2 頂点について G で辺があれば,G' でも辺があることを言う.
2 個の頂点 $a, b \in G$ が道でつながっているとは,G に ab 道が存在することを言う．前に示した命題より a, b 間に歩道が存在すれば a と b は道でつながっている.

定義 1.13 (連結性)**.** グラフ G が連結であるとは, その任意の 2 頂点が道でつながっていることを言う．$V(G)$ の部分集合についても, その任意の 2 点が道でつながっているならば, それは連結であると言う.

歩道に関する命題 1.11 より, 任意の 2 頂点が歩道で繋がっていることを示せれば連結である.

1.2 重要なグラフのクラス

定義 1.14 (木)**.** 連結で閉路を持たないグラフを木と言う.

命題 1.15. グラフ $G = (V, E), |G| \geq 2$ について次の条件は同値

(i) G は木である.

(ii) G の任意の相異なる 2 頂点は, 唯一の道で結ばれている.

(iii) G は連結であるが, G から 1 つでも辺を除くと連結で無くなる.

(iv) G は連結で$\#E = \#V - 1$

Proof. $(i) \to (ii)$: G を木とする.G のある相異なる 2 頂点が相異なる 2 つの道 $x_0...x_m$と $y_0...y_n(x_0 = y_0, x_m = y_n)$ で結ばれているとする.すると $x_i \neq y_i$なる最小の i が存在する.この時 $i > 0$ で $x_{i-1} = y_{i-1}$. さらに, $j \geq i$ で, $x_j \in \{ y_i, ..., y_n \}$ を満たす最小の j が存在する.実際 $m \geq i$ は条件を満たしている.すると $x_j = y_k(k \geq i)$ として, $x_{i-1}...x_j y_{k-1}...y_i x_{i-1}$が閉路となる.これは仮定に反する.
$(ii) \to (iii)$: (ii) を仮定する.$e = a, b \in E$ に対し e を除くと a, b は道でつながらなくなる.というのも, つながっていたとしたら, a と b の間に e を含まない道が存在することになり, e とこの道で二つの異なる道で a と b が結ばれて, (ii) に反する.
$(iii) \to (i)$: (iii) を仮定する.仮に G に閉路が存在したら, 閉路に含まれる辺を取り除いても, G はなお連結である.よって, G は閉路を持たない.
$(i) \to (iv)$: 頂点が一つの時は真である.G を木とすると, G は少なくとも一つ次数 1 の頂点を持つ.その頂点を除いても, G はなお木である.帰納法の仮定により, そこでは (v) が成立し, 元の G でも成立するとわかる.
$(vi) \to (i)$: G からいくつか (閉路がなくなるまで) 辺を除くと木になる.除いた辺の個数を k とすると, 木では $\#E = \#V - 1$ である (上で示した) ため, 元の G では$\#E - k = \#V - 1$ となる仮定より, $k = 0$.よって G は木である. □

木 T において 2 頂点 x, y をむすぶ唯一の道を xTy と表す. 木において,1 点 を指定したものを根つき木と言う.

定義 1.16 (木順序)**.** 根つき木 (T, r) において $V(T)$ 上の順序を, $x \leq y \Leftrightarrow x \in rTy$ と定める.

これは確かに順序である. まず $x \leq y$ ならば $rTx \subseteq rTy$ (部分グラフとしての包含) に注意する. 実際例えば $x \leq y, y \leq x$ とすると, 上の注意より $rTx \subseteq rTy \subseteq rTx$ で, $rTx = rTy$. よって $x = y$. などなど.

定義 1.17 (完全グラフ)**.** 任意の相異なる 2 頂点が隣接しているグラフを完全グラフという.位数 n の完全グラフを K^nと表す.

定義 1.18 (二部グラフ)**.** 次の条件を満たすグラフ G を二部グラフという
(条件) どちらも空でない, 互いにな集合 V_1, V_2が存在し, 次を満たす

- $V(G) = V_1 \cup V_2$(直和)
- $E(G) = \{\{x, y\}|\ x \in V_1, y \in V_2\}$

$\#V1 = m, \#V2 = n$ の二部グラフを $K_{m,n}$と表す.

1.3 マイナーと位相的マイナー

グラフ同士の関係としては, すでに部分グラフや誘導部分グラフの概念を説明した. 以下では類似した, しかしより柔軟な 2 つの概念を導入する.

定義 1.19 (縮約)**.** グラフ $G = (V, E)$ から, 次のようにして得られるグラフ (V', E') を G の縮約という.

- $V' = \{V_x\}_{x\in V}$ は V の分割であり, 各同値類 V_x は G で連結である.
- $E' = \{\ V_xV_y \mid xy \in E\ \}$

ここで集合 V の分割とは,$\{V_x\}_{x\in V}$ であって, $V = \bigcup_{x\in V} V_x$ で, $x \in V_x$,$V_x \cap V_y \neq \emptyset \Rightarrow V_x = V_y$ なるものを言う. いわゆる同値類による分割である.

定義より, 一般に $V_xV_y \in E' \Leftrightarrow \exists x' \in V_x, y' \in V_y\ s.t.\ x'y' \in E$ であることに注意. 縮約を行うとき, 各連結集合 V_x を**分岐集合**と呼ぶ. C が G の連結集合で,$V' = (V\backslash C) \cup \{C\}$ の時, この縮約は G/C と書かれる. 特に辺の縮約は G/e のように書く.

命題 1.20. 任意の縮約は辺の縮約の繰り返しによって得られる. すなわち, グラフ H が G の縮約であるとき, グラフの列 $G = G_0, G_1, ..., G_n = H$ と辺 $e_i \in G_i$ が存在して, $G_{i+1} \simeq G_i/e_i\ (i = 0, ..., n-1)$ となる.

Proof. 縮約すると必ず少なくとも 1 つ次数が下がる (頂点が一つは減る) ことに注意. よって帰納法が使えそうだとわかる. 以下の証明はあえてくどくどと書いて, 一応式で証明できるということを示そうとしたが, 実際は図を書いてイメージする方がはるかにわかりやすい. やっていることはもともとの分岐集合から一つ選んで先にその中で 1 回辺縮約してから縮約しても, 元の分岐集合で縮約した場合と同じグラフが得られるということである.
G の位数に関する帰納法で示す.$|G| = 1$ の時, いうべきことは何もない.$|G| > 1$ として, これより小さい $|G|$ では成り立っているとする. 考えている分割を $V' = \{V_x\}_{x\in V}$ とする. このとき縮約によって得られるグラフは $G' = (V', E')$, $E' = \{V_xV_y | xy \in E\}$ である. 分岐集合の位数が全て 1 の時はいうべきことはない (縮約を行っても何も変わらないので縮約を行う必要がない.) 少なくともある一つの分岐集合では位数が 2 以上の場合を考える. 位数が 2 以上の分岐集合を V_x とし, 連結性より隣接する 2 頂点を $x, y \in V_x$ とする.G において, まず辺 $e = xy$ のみを縮約したグラフを $G'' = (V'', E'')$ とすると,

$$\begin{aligned} V'' &= (V\backslash\{x, y\}) \cup \{e\} \\ E'' &= \{zw \in E\ |z, w \in V\backslash\{x, y\}\ \} \cup \{ze\ |z \in V\backslash\{x, y\},\ (zx \in E\ or\ zy \in E)\} \end{aligned}$$

このグラフに対し, 次の分岐集合を考える.$z \in V''$ に対し,

$$V''_z = \begin{cases} V_z & (z \in V\backslash V_x) \\ (V_x\backslash\{x, y\}) \cup \{e\} & (otherwise) \end{cases}$$

要するに,V_x 以外はそのままで,V_xからは x と y をのぞいて,e を追加している. このとき縮約によって得られるグラフ $G''' = (V''', E''')$ は, $V''' = \{V''_z\}_{z\in V''}$, $E''' = \{V''_zV''_w \in [V''']^2 | zw \in E''\}$ である. ここでグラフ準同型

$$\phi : G' \to G'''; V_z \mapsto \begin{cases} V''_z(z \in V\backslash\{x, y\}) \\ V''_e(z = x, y) \end{cases}$$

を考える. 実際にグラフ準同型であることはつぎのようにわかる.
$z, w \in V$ として $\phi(V_z)\phi(V_w) \in E'''$ の同値条件を考える. まず $V_z, V_w \neq V_x$ の時,$\phi(V_z)\phi(V_w) = V''_zV''_w$ であ

り, また集合として $V''_v = V_z, V''_w = V_w$ であるため,

$$\begin{aligned} & \phi(V_z)\phi(V_w) \in E''' \\ \Leftrightarrow\ & \exists z' \in V''_z, w' \in V''_w\ s.t.\ z'w' \in E'' \\ \Leftrightarrow\ & \exists z' \in V_z, w' \in V_w\ s.t.\ z'w' \in E'' \\ \Leftrightarrow\ & \exists z' \in V_z, w' \in V_w\ s.t.\ z'w' \in E \\ \Leftrightarrow\ & V_zV_w \in E' \end{aligned}$$

次に $V_z, \neq V_x,\ V_w = V_x$ の時, $\phi(V_z)\phi(V_w) = V''_zV''_e$ であり, また集合として $V''_v = V_z, V''_e = (V_x \backslash \{x,y\}) \cup \{e\}$ であるため,

$$\begin{aligned} & \phi(V_z)\phi(V_w) \in E''' \\ \Leftrightarrow\ & \exists z' \in V''_z, w' \in V''_e\ s.t.\ z'w' \in E'' \\ \Leftrightarrow\ & (\exists z' \in V_z, w' \in V_x\backslash\{x,y\} s.t.\ z'w' \in E'')\ or\ (\exists z' \in V_z\ s.t.\ z'e \in E'') \\ \Leftrightarrow\ & (\exists z' \in V_z, w' \in V_x\backslash\{x,y\} s.t.\ z'w' \in E)\ or\ (\exists z' \in V_z\ s.t.\ z'x \in E\ or\ z'y \in E) \\ \Leftrightarrow\ & \exists z' \in V_z, w' \in V_x\ s.t.\ z'w' \in E \\ \Leftrightarrow\ & V_zV_w \in E' \end{aligned}$$

というわけで $V_zV_w \in E \Leftrightarrow \phi(V_z)\phi(V_w) \in E'''$ が言えたので, 準同型であるとわかった. さらに, 写像が全単射であることを見れば, 同型であるということも言える.

- (全射) 全ての $V''_z \in V'''$ を考える必要がある. z としては $z \in V\backslash\{x,y\}$ と $z = e$ があるが, 前者は $V_z \mapsto V''_z$, 後者は $V_x \mapsto V''_e$ より,ok.
- (単射)$z, w \in V, \phi(V_z) = \phi(V_w)$ とする. この時 $V_z = V_w$ を示せば良い. $z, w \in V\backslash V_x$ の時は,$V_z = V''_z = \phi(V_z) = \phi(V_w) = V''_w = V_w$. $z, w \in V_x$ の時は,$V_z = V_x = V_w$. $z \in V_x, w \in V\backslash V_x$ の時 $\phi(V_z) = V''_e \neq V''_w = \phi(V_w)$ となって矛盾. というわけで $V_z = V_w$ が成立.

以上により,G から G' への縮約は, G からまず $G'' = G/e$ に縮約してそこから $G'''(\simeq G')$ に縮約するのと同じであることがわかった.G''は G より位数が一つ小さいので,G''から G' への縮約は辺縮約の繰り返しによって実現できる. したがって G から G' への縮約も辺縮約の繰り返しで実現できる. □

筆者の非力によりこの証明を書くのに時間がかかり過ぎてしまったので, 以下この章の記述はかなり適当になることをお詫びします.

命題 1.21. 任意の連続した縮約は 1 回の縮約にまとめることができる. すなわちグラフ G_2が G_1 の,G_3が G_2 の縮約であるとき, G_3は G_1 の縮約にもなっている.

Proof. 先の命題より,G_1から G_2,G_2から G_3 の縮約は共に辺縮約の繰り返しで実現できるとわかったため, 辺縮約の繰り返しにより G_1から G_3 まで行けるとわかる. よって辺縮約の繰り返しが一つの縮約にまとめられるとわかれば良い. このためには, 繰り返し回数に関する帰納法により, 辺縮約 + 縮約を一つの縮約にできることを示せば良い. これはさほど難しくないので読者に任せる. □

定義 1.22 (マイナー)**.** グラフ G に対して,(i) 辺の除去 (ii) 孤立点の除去 (iii) 辺の縮約の 3 つの操作を繰り返して得られるグラフを G のマイナーという. (正確にはそうして得られるグラフに同型なグラフを G のマイナーという.)

辺の除去と孤立点の除去は部分グラフを取ることに相当し, あらゆる部分グラフを取る操作はこの二つの操作の繰り返しで行えることに注意. この定義より, マイナーの関係はグラフの全体に擬順序 (反射律 $x \succeq x$ と

推移律 $x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$ を満たす関係) を定める．H が G のマイナーの時, $H \preceq G$ や $G \succeq H$ とかく．$G \succeq H, G \preceq H$ の時,$G \simeq H$ である．

命題 1.23. $G \succeq H$ の時 H は G の部分グラフに対する縮約によって得られる．

Proof. 辺の除去, 孤立点の除去, 辺の縮約の操作をそれぞれ A, B, C と置くとき, 操作が $ABCABCABC...$ のように並んでいたら, 並び替えて $ABABABCCCC$ のようにして C を全て最後に回せることを示せば良い．例えば操作 CA を考える．すなわちある辺を縮約してから別の辺を除去するという操作である．考えているグラフを G, 縮約する辺を $e = xy$ とし,G の頂点集合をあらかじめ $V(G) = V \cup \{x, y\}(x, y \notin V)$ とする．また x, y を除く頂点のうち,

- x に隣接しているが y に隣接していない頂点の集合 (ただし y は除く) を K
- x と y の両方に隣接している頂点の集合を L
- y に隣接しているが x に隣接していない頂点の集合 (ただし x は除く) を M

とすると,G の辺集合は e 及び e の端点と隣接しない辺の全体を E として,
$E(G) = E \cup \{e\} \cup \{xz | z \in K \cup L\} \cup \{yz | z \in L \cup M\}$ と表せる. この時, グラフ G/e は,

$$V(G/e) = V \cup \{e\}$$
$$E(G/e) = E \cup \{ez | z \in K \cup L \cup M\}$$

ここから辺を除くとなると,E か $\{ez | z \in K \cup L \cup M\}(= E')$ のどちらかからとなるが, E から除く場合は縮約との順番が前後しても特に変わりはない. つまり $CA \to AC$ とできる．一方で E' から除く場合は,$ez(z \in K\ or\ M)$ の時は, これまた特に変わりはないが, $ez(z \in L)$ の時は,G の方であらかじめ辺を 2 つ除去しておく必要がある. すなわち $CA \to AAC$ となる. いずれにせよ,C を後ろに回せることがわかった．CB の場合も同様で証明が終了する． □

同じ論法により, 縮約した後に部分グラフを取ることによっても得られることが示せるが, その事実はあまり使わない.

定義 1.24 (細分)**.** グラフ G, H について,G が H の細分であるとは,H のいくつかの辺に対して, 頂点を挿入して G が得られることを言う．

定義 1.25 (辺の連結)**.** 二つの辺が次数 2 の頂点を共有している時に, その頂点を除去して 2 つの辺をくっつける操作を辺の連結という．ただしこの時 2 つの辺の除去しなかった方の 2 つの端点はもともと隣接していないとする．すなわち,$G = (V, E)$, $xy, yz \in E$ で $d(y) = 2($ つまり y は xy と yz 以外の辺に属していない) かつ $xz \notin E$ の時, 新たなグラフ G' を $V(G') = V \backslash \{y\}$, $E(G') = (E \backslash \{xy, yz\}) \cup \{xz\}$ として作る操作を辺の連結という.

辺の連結は辺の縮約の一種である. これは筆者が便宜上勝手に作った造語である.(多分)

定義 1.26 (位相的マイナー)**.** グラフ G に対して,(i) 辺の除去 (ii) 孤立点の除去 (iii) 辺の連結の 3 つの操作を繰り返して得られるグラフを G の位相的マイナーという．(正確にはそうして得られるグラフに同型なグラフを G の位相的マイナーという.)

位相的マイナーの関係もやはりグラフ全体に擬順序を定める．位相的マイナーをとると, グラフの頂点の最大次数は必ず低下することに注意しよう.

命題 1.27. H が G の位相的マイナーであるとき,G のある部分グラフが H の細分になっている.

Proof. 1.23 の証明と同様に, 順番を入れ替えて, 辺の連結を全て最後に持ってこれることを示せば良い. そして, あるグラフから辺の連結を繰り返して別のグラフを得た時, 元のグラフはその別のグラフの細分になっていることより, 題意が従う. □

命題 1.28. マイナーと位相的マイナーについて, 次が成り立つ.

- H が G の位相的マイナーならば,H は G のマイナーである.
- H が G のマイナーで,$\Delta(H) \leq 3$ ならば, H は G の位相的マイナーである.

Proof. 1 つ目の命題については, 辺の連結が辺縮約であることから明らかである. 2 つ目はさほど自明ではないが, 次のようにして示せる.H が G のマイナーであるとき, G'を G のある部分グラフとして,H は G' の縮約で得られる.G' に対して辺の縮約を繰り返して H を得るとして, 最後に縮約された辺を $e = xy$ と する. つまり $G' \preceq G''$,$G''/e \simeq H$. 最後のこの縮約が例えば $zx, wx, xy, yz', yw' \to ze, we, ez', ew'$ のようになっていたらこれは位相的マイナーとはなり得ない. というのも元々のグラフでは x と y の次数が 3 であったのに, 新たなグラフで次数 4 の頂点 e が出現してしまっているからである. 位相的マイナーをとるときに次数が増えることはない. ところが今は H の最大次数を 3 以下と仮定しているので, このような問題は起きない. 例えば $zx, wx, xy, yz' \to ze, we, ez'$ というような縮約は辺 xy と $z'y$ を連結して zx, wx, xz' とすることによって実現できる. つまり辺の連結で事足りるので, 位相的マイナーになるのである. 他にもいくつかパターンが考えられるが, 場合分けして全ての場合を確認できる. □

2 平面的グラフ

この章の内容は自分でもよくわかっていないので, いい加減なことを書いている可能性がある.

2.1 オイラーの公式

$\mathbb{R}^2$ の単純曲線とは, 単位閉区間 $[0,1]$ と同相な $\mathbb{R}^2$ の部分集合をさす. そして, その端点とは, そこにおいて切断点でない点を指す.

定義 2.1 (平面グラフ)**.** $G = (V, E)$ が平面グラフであるとは次の条件を満たすものを言う.
(条件)

- $V \subseteq \mathbb{R}^2$
- G の各辺 $e \in E$ に対し, ある単純曲線 γ_e が定まり,
  - γ_e の端点集合と e(の端点) が一致する.
  - 相異なる $e, e' \in E$ に対し,γ_eと$\gamma_{e'}$ は端点以外を共有しない.

平面グラフと同型なグラフを平面的グラフという. 平面グラフにおいて, その各辺に対応する単純曲線 γ_e全体の合併を G の点集合という. G の点集合も G と書いてしまうことが多い. つまり $G = \cup_{e \in E} \gamma_e$ とみなす. また,G の辺という言葉で,G の辺に対応している単純曲線をさすことも多い. つまり,$e \in E$ とγ_e を同一視し

てしまう.

定義 2.2 (領域)**.** 平面グラフ G に対し,$\mathbb{R}^2\backslash G$ の連結成分を G の領域という.

G は閉集合ゆえ,$\mathbb{R}^2\backslash G$ は開集合であり, したがってその連結成分すなわち G の領域はすべて開集合である.

命題 2.3. 領域の境界は G の点集合に属する.

Proof. X を G の領域一つ,Y を X 以外の領域全体の合併とする. $\mathbb{R}^2 = X \cup G \cup Y$(直和) である. Y は開集合であるから,$X \cup G$ は閉集合である. したがって X の閉包を含む. よって $\bar{X} \subseteq X \cup G, X^f \subseteq G$. □

命題 2.4. 任意の辺 γ_e と, 領域の境界 X に対し,$\gamma_e \subseteq X$ または $\mathring{\gamma}_e \cap X = \emptyset$ が成り立つ. 任意の辺はちょうど 1 つか 2 つの領域の境界に含まれ, ある辺が閉路に含まれることと, ちょうど 2 つの領域の境界に含まれることは同値である.

Proof. これは認めてしまう. 実際はジョルダンの曲線定理などを使って示す. □

命題 2.5. 平面グラフ G の領域は,G のいくつかの辺と頂点の和で構成される境界を持つ.

Proof. X を領域の境界とする.$\gamma_e \subseteq X$ なる e 全体を $e_1, ..., e_n$ とすると, $\gamma_{e_1} \cup ... \cup \gamma_{e_n} \subseteq X$. $x \in X\backslash(\gamma_{e_1} \cup ... \cup \gamma_{e_n})$ なる x が存在したとすると, その x は G の頂点でなくてはならない. というのも,x がある辺の内点なら $x \in \mathring{\gamma}_e$ において $\mathring{\gamma}_e \cap X \neq \emptyset$ より, $x \in \gamma_e \subseteq (\gamma_{e_1} \cup ... \cup \gamma_{e_n})$ となってしまう. 頂点の (G における) 孤立性を言いたかったが, よくわからん別に言えなくてもいいかもしれない. □

ある領域の境界が 3 つの辺で構成された閉路である時, その境界を **3 角形**という.

命題 2.6. 平面グラフ G に対し, 閉路を持つことと,2 つ以上の領域を持つことは同値である. また, 閉路に属する辺を一つ除去すると, 領域の数は一つ減る.

Proof. 閉路を持つなら 2 つ以上領域があるのはわかっている. 逆はよくわからん. □

命題 2.7. (オイラーの公式)
連結な平面グラフ G について,$n = |G|$, $m = |E(G)|$, $l =$ (領域の個数) とおくと,$n - m + l = 2$ が成り立つ.

Proof. G を木とすると,$m = n - 1, l = 1$ ゆえ, 確かに成立. 一般の場合,$k = n - m + l$ とおくと, 閉路が存在すれば, そこから一つ辺を除去すると, n は変わらず,m と l が 1 ずつ小さくなる. したがって k は不変. 閉路がなくなるまでこの操作を繰り返すと, 木を得るので $k = 2$ となる. □

オイラーの公式において, 領域の個数を表す l を消去することができたら, 頂点数と辺の数の間の関係を導くことができる.

2.2 極大平面的グラフと禁止マイナー

それ以上辺を付け足すことができないような平面グラフを極大平面グラフという.

命題 2.8. 平面グラフについて, 極大平面グラフであることと, 全ての領域の境界が 3 角形であるとこは同値である.

Proof. 平面グラフ G を考える.G の境界が全て 3 角形であるとすると, それ以上辺を付け足せないことを見るのは比較的易しい. 仮に辺 e を付け足せたとして矛盾を示そう.e の内点全体は連結集合をなし, $\mathbb{R}^2 \backslash G$ に含まれるので,G のある領域に全て含まれる. その領域を D とすると,D 閉包は e を含み, さらに e の端点は G の頂点集合に含まれるので, e の端点 $\subseteq D \cap V(G)$ 右辺は全て相互に結ばれた 3 点であるから, e を新たに追加できたのはおかしい. 逆に,G の領域で境界が 3 角形でないものがあったとする. この時, 新たに辺が付け加えられると予想されるが, 示すのはちょい面倒. □

極大平面グラフでは, 全ての領域に対し,3 つの辺が対応し, さらに各辺は 2 つの領域に対応するため,$3l = 2m$ を得る. これをオイラーの公式に代入すると, $3n - 3m + 2m = 6$ よって,$m = 3n - 6$. 一般の平面的グラフではこれより辺の数が少ないので,$m \leq 3n - 6$ が成り立つ.

命題 2.9. K^5 は非平面的.

Proof. K^5 では頂点の数 $n = 5$, 辺の数 $m = 10$ より,$m \leq 3n - 6$ が不成立. □

命題 2.10. $K_{3,3}$ も非平面的.

Proof. $K_{3,3}$ が平面的として矛盾を導く. 一般に完全二部グラフは奇数長の閉路を持たない. また任意の辺は閉路に含まれる. したがって任意の領域の境界は長さ 4 以上の閉路である. したがって $2m \geq 4l$. オイラーの公式より,$4l = 4m - 4n + 8$ なので, $m \leq 2n - 4$. しかるに $K_{3,3}$ では,$m = 9, n = 6$ で, 矛盾. □

命題 2.11. K^5, または $K_{3,3}$ をマイナーとして含むグラフは非平面的.

Proof. あるグラフが平面的ならその部分グラフも平面的であり, またあるグラフの細分が平面的なら元のグラフも平面的である. したがって, 平面的グラフの位相的マイナーは平面的である. 今,$K_{3,3}$ をマイナーとして含むグラフがあると, 命題 1.28 よりそのグラフは $K_{3,3}$ を位相的マイナーとしても含む. したがってそのグラフが平面的なら $K_{3,3}$ も平面的であることになり矛盾.K^5 をマイナーとして含む場合は実は K^5 を位相的マイナーとして含むか $K_{3,3}$ をマイナーとして含むかのどちらかが成り立つので命題が成立. □

3 グラフ・マイナーの定理

3.1 定理の帰結

以下で, 有限グラフ全体の集合というものを考えるが, 本当に有限グラフ全体を考えたら集合で無くなってしまうので, 例えば頂点集合が $\mathbb{N}$ に含まれるような有限グラフの全体を考えるのである. この時, 有限グラフの全体は, マイナーの関係 ($\succeq$) により, 擬順序集合となる. そして次が成り立つことが知られている.

命題 3.1. 有限グラフの全体は無限の反鎖を持たない.

ここで反鎖とは, どの相異なる 2 元を取っても互いに大小関係にないような集合のことである. したがって有限グラフ全体が無限の反鎖を持たないとは, 有限グラフの無限列があったら, そのうちのある 2 つでは, 必ずどちらかがどちかがのマイナーになっているということである. 言い換えると, もし所属するどの 2 つのグラフも互いにマイナーの関係にないような集合が存在したら, それは有限集合ということである. この事実はグラフ・マイナーの定理と呼ばれている.

今有限グラフに関するある性質 P を考え, それがマイナーにも遺伝するとしよう. すなわち, グラフ G が性質 P を持てば, そのマイナーも性質 P をもつとする. この時, 性質 P を持たないグラフ全体の集合を考え, その極小元全体を $F_1, ..., F_n$ とする. 極小元同士は互いに関係がないので, 極小元は有限個しかない (グラフ・マイナーの定理). G が性質 P をもつとすると G は $F_1, ..., F_n$ のどれもマイナーとして持たない. (持っていたら $F_1, ..., F_n$ にも遺伝していて矛盾.) 一方で逆に,G が性質 P を持たないならば,G の下に極小元として $F_1, ..., F_n$ のどれかが存在する (有限グラフからなる集合では,任意の元 (グラフ) の下に極小元が存在する. というのもあるグラフが極小でないとすると, その下に何かしらグラフがあり, それも極小でないとすると, さらに下に何かあり, というようにマイナーを取っていくことができるが, マイナーをとると頂点または辺の個数が必ず減少するので, この操作は有限回で終わり, いつかは極小元を得る.) すなわち,G が性質 P をもつことと, 有限個の $F_1, ..., F_n$ をマイナーとして持たないことは同値となる. 以上をまとめると,

命題 3.2. 有限グラフの性質で, マイナーを取ることに関して閉じているものは, 有限個の禁止マイナーにより特徴付けられる.

3.2 木の場合の証明

以下で木に限定した時のグラフ・マイナーの定理を証明する. そのために、「良い擬順序」という概念を導入する. 一般にグラフ・マイナーの定理の言明や証明はこの概念を用いてなされる. 一般に擬順序集合において, その無限列 $x_0, x_1, ...$ が良い無限列であるとは, ある $i, j (i < j)$ が存在して,$x_i \leq x_j$(このような x_i, x_jを良い組と言う). を満たすことを言う. よくない無限列は「悪い」と言う. 任意の無限列が良い無限列であるような擬順序集合は良い擬順序であると言う.

命題 3.3. 擬順序集合 $(X, \leq)$ について, 次は同値

(i) X は良い擬順序集合.
(ii) X は無限の反鎖も無限の狭義減少列も持たない.
(iii) X の任意の無限列は無限部分増大列を持つ.

ただし, 狭義減少列とは,$x_0, x_1, ...$であって, 任意の $i(i \geq 0)$ において,$x_i \leq x_{i+1}$かつ $(x_i \geq x_{i+1})$ でない ことを言う.

Proof. $(i) \to (ii)$: 無限の反鎖も無限の狭義減少列も悪い列であるから, 良い擬順序であれば存在しない.
$(ii) \to (iii)$: グラフ理論の一つであるラムゼー理論というもののごく初歩的な結果を用いて証明できるが、ここでは省略. 参考文献を参照のこと.
$(iii) \to (i)$: 無限部分増大列には良い組みが存在する.

□

有限グラフの集合を考えているときは、無限狭義減少列は存在しないため、(ii) は無限の反鎖が存在しないことと同義であり、グラフ・マイナーの定理は次のように表現できると分かる.

命題 3.4. 有限グラフの全体はマイナーの関係により良い擬順序集合をなす.

グラフ・マイナーと良い擬順序の議論において、次の命題は基本的である.

命題 3.5. $(A, \leq)$ が良い擬順序の時,$[A]^{<\omega}$ に拡張してもまた良い擬順序である．ここで $[A]^{<\omega}$ への拡張は次のように定める．$B, C \subseteq A$ に対し，$B \leq C$(同値) 単射 $f: B \to C$ が存在し,(任意の)$x \in B$ に対し $x \leq f(x)$.

Proof. 背理法による.$[A]^{<\omega}$ が良い擬順序でないとすると，少なくとも一つ悪い列が存在する. その列の先頭(別に先頭でなくとも良いが) を A_0 とする. 次に A_1 として,A_0, A_1 に続く悪い列が存在するような最小位数の集合を取ってくる. これを繰り返して悪い列 $A_0, A_1, ...$ を得る．悪い列であることから, 列の中に空集合は存在しないことに注意．(空集合は最小元である!) 各要素から適当に一つ元を取ってきて $a_i \in A_i$, $B_i = A_i \backslash \{a_i\}$ とする．$a_0, a_1, ...$ は良い擬順序である A の無限列であるから無限部分増大列を持つ. それを $a_{i_0}, a_{i_1}, ...$ とする. この時 A_i の定め方より, $A_0, .., A_{i_0-1}, B_{i_0}, B_{i_1}, ...$ は良い列であり, 良い組をもつ. それが (A_i, A_j) や (A_i, B_j) の形であったら結局 $(A_i)_{i=0,1,...}$ の増大列となって矛盾．と言うわけで (B_i, B_j) の形でなくてはいけない．しかしこの時も写像 $B_i \to B_j$を a_iを a_j に移すことにより $A_i \to A_j$ に拡張できて $A_i \leq A_j$ が得られてしまい矛盾．よって $[A]^{<\omega}$ も良い擬順序である. □

2 つの根つき木に対し, 以下のように大小関係を定める．$(T, r), (T', r')$ に対し,T の細分 T" から T' の部分グラフへの同型で, 木順序を保つものが存在するとき, $(T, r) \leq (T', r')$ と定める．$(T, r) \leq (T', r')$ の時,T は T' の位相的マイナーになっていることに注意.

命題 3.6. 根つき有限木全体からなる集合では, 上で定めた関係により, 良い擬順序集合となる.

Proof. これまた背理法による. 根つき木からなる悪い無限列が存在したとして, さっきみたいにある意味極小な悪い無限列 $T_0, T_1, ...$ を作る．各 T_iからその根 r_i をのぞいた残りの連結成分を全て集めた集合を A_i とする. 各連結成分においてその根っこを,r_i と接続している頂点として定め, 各連結成分を根つき木とみなす. $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ とおき,A が良い擬順序集合であることを示す．もし示せたら,$[A]^{<\omega}$ も良い擬順序集合であり, したがって $A_0, A_1, ...$ が良い列であることから,$A_i \leq A_j$なる $i < j$ が存在する．この時 $T_i \leq T_j$ となることがなんとなくわかる ($A_i \leq A_j$ を保証する写像を貼り合わせて T_iの細分を T_j に埋め込める．ちゃんと考えたら成り立っている)．これは矛盾するので証明が終わる．と言うわけで A が良い擬順序集合をなすことを示そう.A の無限列 $T^0, T^1, ...$ を考える.$T^i \in A_n$なる n の一つを $n(i)$ と置くと,$T^i \leq T_{n(i)}$ が成立．$n(i)$ が最小になる i を i_0 とする．この時 $T_0, ..., T_{n(i_0)-1}, T^{i_0}, T^{i_0+1}, ...$ は良い列となる ($T_0, T_1, ...$の極小性). したがって良い組を持つが, それが T_i, T_j と言うことはあり得ない．また T_i, T^jの形だと,$T_i \leq T^j \leq T_{n(j)}$において $i < n(i_0) \leq n(j)$ なので $T_i, T_{n(j)}$ が良い組となって不可. よって良い組は T^{i_0}, T^{i_0+1} の中に存在する．すなわち $T^0, T^1, ...$ は良い列. よって A は良い擬順序集合．というわけですでに述べたように,$A_0, A_1, ...$ の良い組から $T_0, T_1, ...$ の良い組を構成できて, 背理法により証明が完了する. □

と言うわけで無限個の木の列があれば, 各元に適当に根を定めると, 上の順序による良い組が存在し, 結局それらは根を無視して位相的マイナーとして良い列になっている. すなわち有限木の全体は位相的マイナーの関係により良い擬順序である．位相的マイナーの関係で良い擬順序であれば, マイナーの関係においても良い擬順序となる.

参考文献

[1] R. Diestel. グラフ理論. 丸善出版. 1997. [訳:根上生也, 太田克弘]