グラフ・マイナーの定理

蒲原純 (KAMOHARA Jun)*

2017 年 3 月 5 日

1　テーマについて

本講演ではグラフ理論について話します。グラフというのは頂点集合に対して、頂点同士がつながっていたりつながっていなかったりする構造を与えたものです。つながっている頂点の間には辺があると言い、辺に対して向きを定めたり、辺の上の距離とか流れだとかを定めたりもします。ただし今回は方向も距離も流れもないただの辺を持ったグラフを考えます。また、ある頂点からその同一の頂点に向かう辺 (ループ) や、2 つの頂点を結ぶ複数の辺 (多重辺) は考えません。こうしたグラフを単純グラフといいます。

単純グラフを考えた時にひとつ気になるのは、それが平面に描写できるかという問題です。「平面に書く」というのは、各頂点を $\mathbb{R}^2$ 上の相異なる点、辺を頂点間の曲線に対応させることを言います。ただし辺同士は端点以外は共有しないものとします。このとき例えばグラフ K^5 は平面に描けません (図 1)。描こうとするとどうしてもどこかで辺同士が交わってしまいます。同様に $K_{3,3}$ なるグラフも描けません (グラフを表す記号については講演で説明します)。すると、ある意味でこれらを「含む」グラフも平面に描けないとわかります。平面に描けるグラフを平面的グラフといいますが、実は平面的であることと、K^5、$K_{3,3}$ を「含ま」ないことは同値になります (「含む」の定義は講演で述べます。部分グラフとして含む、というのに近いですが、より広い概念で、マイナーの関係と呼ばれます)。

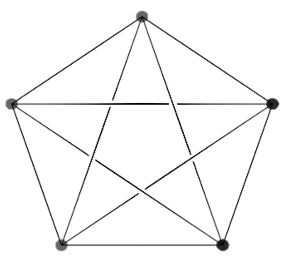

図 1　K^5：平面に描けない*1

$\mathbb{R}^2$ 上に描写できるという性質については上記のようにきれいな特徴づけがあることがわかりましたが、他の性質についてはどうでしょうか。例えばトーラス上に描くときはどうでしょう。実は、平面的というのを含

* 阪ゼミ (https://sites.google.com/site/ouvsemi/)

*1 描けてしまったのは交差する辺を上下にずらしたからです。

むある種の性質は常にこのような特徴づけを持つことが示せます。すなわちある性質を持つことと、いくつかの有限個のグラフを「含ま」ないことが同値となります。この事実を保証するのがグラフ・マイナーの定理です。グラフ・マイナーの定理自体は証明しようと思ったら本 1 冊ですまないぐらいらしいので、今回は定理の内容と証明の雰囲気だけでも説明できたらいいと思っています。

2 講演の流れ

はじめに単純グラフと、それに関係する基本概念を定義し、完全グラフや木などの基本的なグラフを導入します。そしてマイナー、及び位相的マイナーと呼ばれるグラフ間の関係を定義し、簡単な例で説明します。前半では、こうした導入に基づき、平面的グラフがどのように特徴付けられるかについて考察します。直感的には成り立つ位相幾何学的な結果を借用しつつ、K^5、$K_{3,3}$ が平面的グラフの「禁止マイナー」になっていることを示します。

後半はグラフ・マイナーの定理に移ります。集合論的な考察をしつつ、定理の意味するところと、その帰結を説明します。最後に木に限定した時のグラフ・マイナーの定理を証明し、「樹状分解」という概念によりその結果を一般のグラフに対しても拡張できそうだ、というところまで話して終わりにしたいと思います。

参考文献

[1] R. Diestel. グラフ理論. 丸善出版. 1997. [訳:根上生也, 太田克弘]

[2] B. Bollobás. グラフ理論入門. 培風館. 1979. [訳:斎藤伸自, 西関隆夫]