局所コンパクト空間上の Riesz の表現定理

大阪大学理学部化学科四年, 大成 仁太

2018 , 3/5

1　はじめに

局所コンパクトハウスドルフ空間 (以後 LCH) はユークリッド空間の一般化であり，多様体も LCH である．この空間上の汎関数[*1]に対して，ある性質のよい測度が一意に対応する．この測度が持つ良い性質は正則性と呼ばれ，様々な近似計算はこれを通して行われることも多い．

今回の発表では，位相空間，測度論の初歩は仮定[*2]する．LCH に関する一般論は結論のみ援用する．

2　内容

以後 X は位相空間とする．

定義 2.1. X が局所コンパクトであるとは，X の任意の点がその閉包がコンパクトであるような近傍をもつとき．

定義 2.2. X がハウスドルフとする．X の開集合系から生成された σ - algebra をボレル σ - algebra といい，$\mathscr{B}(X)$ とかく．これは開集合系を含む最小の σ - algebra である．$\mathscr{B}(X)$ を定義域に持つ測度をボレル測度という．

$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(X)$ を $\sigma-\mathrm{algebra}$ とし，これ上の測度μ が正則であるとは,

$$\text{任意のコンパクト集合 } K \text{ に対し}, \mu(K) < \infty \tag{2.1}$$

$$\text{(外正則性) 任意の } A \in \mathscr{A} \text{ に対し}, \mu(A) = \inf\{\mu(U) | A \subseteq U, U \text{ は開集合 }\} \tag{2.2}$$

$$\text{(内正則性) 任意の開集合 } U \text{ に対し}, \mu(U) = \sup\{\mu(K) | K \subseteq U, K : \text{コンパクト }\} \tag{2.3}$$

を満たすとき．

補題 2.1. X, Y をハウスドルフとする．両方にボレル $\sigma-\mathrm{algebra}$ を入れる．$f : X \to Y$ が連続ならば可測.

命題 2.2. X:LCH が第二可算なら，X 上のコンパクト空間上で有限な測度は正則.

[*1] 関数空間を定義域に持つ写像であり，これは発表者の専門である量子化学にもよく出てくる．DFT で検索あれ．

[*2] 具体的には，ハウスドルフ性やコンパクト性に関する定理，外測度から測度を構成する方法程度を押さえておけば良い．

定義 2.3. $f : X \to \mathbb{R}$ とする．[*3] f の台 (supp) を，

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}} \tag{2.4}$$

で定義する．

X が *LCH* のとき，

$$\mathcal{K}(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ は連続，} \mathrm{supp}(f) \text{ はコンパクト }\} \tag{2.5}$$

とする．これは $\mathbb{R}$ – 線形空間になっている．これの双対空間の元を X 上の汎関数という．

汎関数 I が，$f \in \mathcal{K}(X), f \geq 0$ に対して $I(f) \geq 0$ を満たすとき，これを positive という．

命題 2.3. X*:LCH*. $K \subseteq X$ をコンパクト，$U \subseteq X$ を，$K \subseteq U$ なる開集合とする．このとき，$\exists f \in \mathcal{K}(X)$; $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ かつ $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$.

補題 2.4. X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．$f \in \mathcal{K}(X), U_1, U_2, ..., U_n$ を，$\mathrm{supp}(f) \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_n$ を満たす開集合とする．このとき，$\exists \{f_n\}_n \subseteq \mathcal{K}(X); f = f_1 + ... + f_n, \mathrm{supp}(f_i) \subseteq U_i$.また，$f \geq 0$ なら，各 f_i も，$f_i \geq 0$ とできる．

定理 2.5. (Riesz の表現定理) X*:LCH*，$I : X$ 上の positive な汎関数とする．このとき，

$$\exists ! \mu : \text{ボレル測度かつ正則} ; \forall f \in \mathcal{K}(X) , I(f) = \int f d\mu \tag{2.6}$$

今回はこれらの証明を追っていく予定である．

参考文献

1. 集合と位相, 斎藤毅, 東京大学出版会
2. Measure Theory,Donald L. Cohn,Birkhäuser(特に 7 章)

[*3] 複素数上でも議論可能