局所コンパクト空間上のRieszの表現定理 ①

(作成 @sintangrio)

(参考) Donald L. Cohn, Measure Theory (7章)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と map $f: X \to \mathbb{R}$. (連続)

(構造を加える)

($\mathbb{R}^n$ の一般化とみなせる)

$(X, \mathcal{O})$: 局所コンパクトハウスドルフ (LCH). ここに測度を入れたいが,

位相構造 $\mathcal{O}$ と両立させたい。

(σ-algebra, measure が必要)

⇝ σ-algebra を $\mathcal{B}(X) :=$ $\mathcal{O}$ を含む最小の σ-algebra とする.

Prop. $(X, \mathcal{O})$: LCH, $f: X \to \mathbb{R}$ が連続なら, $\mathcal{B}(X)$-可測。
pr. 測度論のどっかでやる ... □

Comment: ~~[illegible]~~ $\mathcal{B}(X)$ は $\mathcal{O}$ と上の意味で両立している

さて, $f: X \to \mathbb{R}$ のなす空間を考えるべく, $\mathrm{supp}(f)$ を定義する.

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \quad (\text{閉包})$$

$$\mathcal{K}(X) := \{f: X \to \mathbb{R} \mid f : \text{連続}, \ \mathrm{supp}(f) \text{ is compact}\}$$

Prop. $\mathcal{K}(X)$ は $\mathbb{R}$-線形空間. (積は, $(fg)(x) := f(x)g(x)$)
pr. $\mathrm{supp}(f+g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$ より □

$\mathcal{K}(X)$ の dual space $\mathcal{K}(X)^* = \{I: \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R} \mid I \text{ is linear}\}$ を考える.
(I のことを汎関数, functional という)

そのため, $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$
($\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, μ : measure) が正則ということを定義する.

上の μ が正則 (regular) とは,

(1) K : compact, $\mu(K) < \infty$ (Rem. $X \setminus K$: open から, $K \in \mathcal{B}(X)$)
(2) U : open, $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U, K \text{ is compact}\}$
(3) $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ is open}\}$

の時.

Comment.
(2) の条件は 内正則性　(3) の条件は 外正則性という.

Prop. $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ が正則なら, $(\underset{\substack{\cap \\ K(X)}}{f} \mapsto \int f d\mu)$ は $K(X)^*$ の元.

prf. $\int f d\mu \leq \underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\, f(x) \cdot \mu(\mathrm{supp}(f)) \in \mathbb{R}$ から. □

Rem. $K(X)$ の元は, コンパクト空間上で連続とみなせるので, 有界である.

では逆に, $I \in K(X)^*$ に対し 正則測度が対応するだろうか?

$f \geq 0$, $I(f) \geq 0$

Thm. (Riesz の表現定理)
X: LCH, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{O}$ を含む最小の σ-algebra. $I \in K(X)^*$ が positive のとき,

$\exists ! \mu: \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$; μ は正則で $\forall f \in K(X)$, $I(f) = \int f d\mu$.

pr. Step 1. μ^* という外測度を定義
Step 2. μ^*-可測と $\mathcal{O}$ の関係 ($\mathcal{O}$ は位相)
Step 3. μ の構成と正則性
Step 4. $I(f) = \int f d\mu$ の成立
Step 5. μ の一意性.

$$\chi_U(x) = \begin{cases} 1 & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$$

Step 1. $\mu^*: 2^X \longrightarrow [0, +\infty]$ を次で定義する. (2^X はベキ集合)

$$\begin{cases} U = \text{open} \mapsto \sup \{ I(f) \mid \underbrace{f \in K(X),\ 0 \leq f \leq \chi_U,\ \mathrm{supp}(f) \subseteq U}_{\text{この条件を } f \prec U \text{ とかく.}} \} \\ A \mapsto \inf \{ \mu^*(U) \mid A \subseteq U,\ U \text{ is open} \} \end{cases}$$

(Rem. $\mu^*(U)$ (U: open) の well-defined は確かめる必要がある.)

これが X 上の外測度であるためには,
(1) $\mu^*(\phi) = 0$
(2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(3) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対し, $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$　をいえばよい.

(1), (2) はほぼ明らか (3) について示す.

(続)
一般の $\{A_i\}$ ではしんどいので $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{O}$ について示す。

$\forall f < \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ について、$\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ より、$\mathrm{supp}(f)$ の compact 性から、

$\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ $(n \in \mathbb{N})$ とできる。ここで次の lemma を用いる。

> lemma. X: LCH, $f \in K(X)$ が $\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_n$, U_n: open をみたすとき、
>
> $\exists \{f_n\} \subseteq K(X)$; $f = \sum_{m=1}^{n} f_m$, $\mathrm{supp}(f_m) \subseteq U_m$.
>
> $f \geq 0$ なら、各 f_m も、$f_m \geq 0$. pr. LCH 一般論 □

よって、$f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $f_i < U_i$ とできる。

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} I(f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)$$

$\therefore\ \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)$ // (sup をとる。)

次に、一般の $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ について示す。μ^* の inf より、$\forall \varepsilon > 0$,

各 A_i に対し $\exists U_i$: open ; $\underbrace{A_i \subseteq U_i \text{ かつ } \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \mu^*(U_i)}_{\text{(集合の包含と } \mu^* \text{ の不等式が逆向きでうれしい!)}}$.

$$\Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$$

よって、$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Rem. $\forall \varepsilon > 0$, $a \leq b + \varepsilon$ なら、
$a \leq b$
(∵) $a > b$ を仮定, $\exists \delta > 0$; $a = b + \delta$.
$a = b + \delta \leq b + \varepsilon$
ここで ε を δ より小さくとって矛盾 //

Step 2. 「$\mathcal{B}(X)$ の元は全て μ^*-可測」を示す。 — (*)

Comment. 「μ^*-可測」について、$U \subseteq X$ が μ^*-可測とは、

「$\forall A \subseteq X$, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$」のとき。

⇝ $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{ U \subseteq X \mid U \text{ は } \mu^* \text{可測} \}$ は σ-algebra で、

$\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ (制限) は 測度になることが 一般の測度論で示される。

(*) を示すには、$\mathcal{O}$ の元でいえばよい。なぜなら、$\mathcal{O}$ でいえれば、$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ となるが $\mathcal{B}(X)$ の最小性から、$\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ となる。

そこで、U: open をとる。$\forall A \subseteq X$, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$ をいう。

- $\mu(A) \leq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$ は 外測度の定義から従う。
- $\mu(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$ をいう。

$\forall \varepsilon > 0$ を固定. $\exists V$: open ; $A \subseteq V$, $\mu^*(A) + \varepsilon \geq \mu^*(V)$.

$\exists f_1 \in K(X)$; $f_1 < U \cap V$ かつ $I(f_1) + \varepsilon \geq \mu^*(U \cap V) \geq \mu^*(U \cap A)$.

$\exists f_2 \in K(X)$; $f_2 < (\mathrm{supp}(f_1))^c \cap V$ かつ $I(f_2) + \varepsilon \geq \mu^*(\mathrm{supp}(f_1)^c \cap V)$

$\geq \mu^*(U^c \cap V) \geq \mu^*(U^c \cap A)$

$$\Longrightarrow \quad I(f_1) + I(f_2) + 2\varepsilon \geq \mu^*(U \cap A) + \mu^*(U^c \cap A) \quad \text{— (**)}$$

ここで、$f_1 + f_2 < V$ から、$I(f_1 + f_2) \leq \mu^*(V) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$. — (***)

(**), (***) から、

$$\mu^*(A) + 3\varepsilon \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c) \quad //$$

(制限)

Step 3. $\mu := \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}|_{\mathcal{B}(X)}$ とするとこれは 測度となる。

これの正則性を示すため、次の lemma を示す。

Lemma. $\begin{cases} \chi_A \le f \Rightarrow \mu^*(A) \le I(f) \\ 0 \le f \le \chi_A,\ A: \text{compact} \Rightarrow I(f) \le \mu^*(A) \end{cases}$
(本当は不要)

prf. • $0 \le f \le \chi_A$, A : compact とする。 $\forall U$: open $\supseteq A$ に対し、
$f \prec U$ となり、 $I(f) \le \mu^*(U)$ 。よって $I(f) \le \mu^*(A)$

• $\chi_A \le f$ のとき、 $0 < \varepsilon < 1$ に対し、 $U_\varepsilon = \{x \in X \mid f(x) > 1-\varepsilon\}$
とする。 U_ε は open で、 $A \subseteq U_\varepsilon$ をみたす。
「 $\forall g \prec U_\varepsilon$, $g \le \frac{f}{1-\varepsilon} \Rightarrow I(g) \le \frac{I(f)}{1-\varepsilon}$ 」なので、

$\mu^*(U_\varepsilon) \le \frac{I(f)}{1-\varepsilon}$ かつ $\mu^*(A) \le \mu^*(U_\varepsilon)$ から従う □

さて、 μ の正則性をいう。

☆ (後ででてくる lemma より)

• K : compact のとき、 $\exists f \in K(X)$; $\chi_K \le f$ で、上の lemma から
$\mu^*(K) \le I(f) \in \mathbb{R}$ 。

• U = open,
$$\mu^*(U) = \sup\{I(f) \mid f \in K(X),\ f \prec U\}$$
$$\le \sup\{\mu^*(\mathrm{supp}(f)) \mid \ '' \ \} \quad (\because 0 \le f \le \chi_{\mathrm{supp}(f)} \le \chi_U)$$
$$\le \sup\{\mu^*(K) \mid K \subseteq U,\ K \text{ is compact}\} \text{ より}$$

• 外正則性は自明。
(ゆっくり考えて)

//

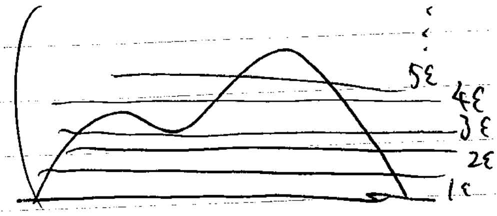
Step 4. $\forall f \in K(X)$, $I(f) = \int f d\mu$ を示す.

($f = f^+ - f^-$ ($f^+, f^- \geq 0$) と分解できることが測度論一般論から分かっているので, $f \geq 0$ に対して示す.)

$\forall \varepsilon > 0$ を固定.

$f \geq 0$ に対し, f_n を,

$$f_n(x) = \begin{cases} \varepsilon & (n\varepsilon < f(x)) \\ f(x) - (n-1)\varepsilon & ((n-1)\varepsilon < f(x) \leq n\varepsilon) \\ 0 & (f(x) < (n-1)\varepsilon) \end{cases}$$



で定める. $f_n \in K(X)$ で $f = \sum_n f_n$ となる. f の有界性から, $\exists N \in \mathbb{N}$;

$f = \sum_{n=1}^{N} f_n$. ここで, $K_0 = \mathrm{supp}(f)$, $K_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\varepsilon\}$ $(n \geq 1)$ とする.

すると, $\varepsilon \chi_{K_n} \leq f_n \leq \varepsilon \chi_{K_{n-1}}$ となる.

両辺を積分

$$\varepsilon \mu(K_n) \leq \int f_n d\mu \leq \varepsilon \mu(K_{n-1})$$

$\downarrow$ $n=1 \sim N$ で和をとる

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) \leq \int f d\mu \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \mu(K_{n-1})$$

$\cdots$ (i)

前ページの lemma.

$$\varepsilon \mu(K_n) \leq I(f_n) \leq \varepsilon \mu(K_{n-1})$$

$\downarrow$ $n=1 \sim N$ で和をとる.

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) \leq I(f) \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N} \mu(K_{n-1})$$

$\cdots$ (ii)

(i) (ii) より,

$$\left| \int f d\mu - I(f) \right| \leq \varepsilon \cdot \left(\mu(K_0) - \mu(K_N) \right) \leq \varepsilon \overset{<\infty}{\boxed{\mu(K_0)}}$$ なので,

$$\int f d\mu = I(f) \quad //$$

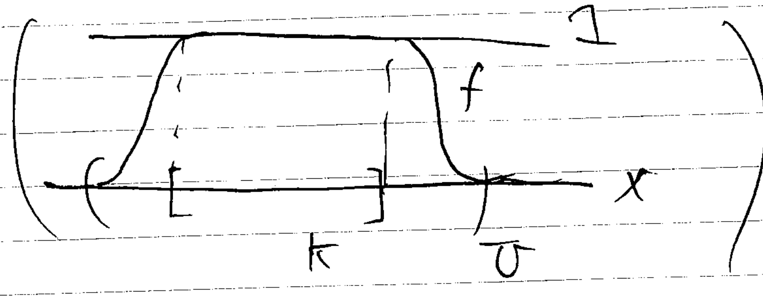
Step 3. μ の一意性.

☆ lemma. X : LCH, $K \subseteq U$, K is compact, U is open

$\Rightarrow \exists f \in K(X)$; $\chi_K \leq f \leq \chi_U$, $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$.

prf. LCH 一般論.

イメージ →



lemma. $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ が正則なとき,

U : open, $\mu(U) = \sup\{\int f d\mu \mid f \in K(X), f \prec U\}$

prf. μ の正則性から, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$: compact ; $K \subseteq U$, $\mu(K) + \varepsilon \geq \mu(U)$.

上の lemma より $\exists f \in K(X)$; $\chi_K \leq f \leq \chi_U$, $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$.

よって, $\mu(U) \leq \mu(K) + \varepsilon \leq \int f d\mu + \varepsilon \leq \sup\{\int f d\mu \mid f \in K(X), f \prec U\} + \varepsilon$

$\Rightarrow \mu(U) \leq \sup\{\int f d\mu \mid f \in K(X), f \prec U\}$ //

$\mu(U) \geq \sup\{\int f d\mu \mid f \in K(X), f \prec U\}$ は自明. □

(一意性) μ, ν が存在したとする. U : open に対し

$\mu(U) = \sup\{\int f d\mu \mid f \in K(X), f \prec U\} = \nu(U)$.

一般の A 上で一致することは, 外正則性から従う □ ▨