

# 楕円関数と代数曲線

TANNO, Mahito \*

2017年3月4日 - 5日

## 1 はじめに

楕円関数とはなんでしょうか。三角関数は微分積分法による円弧の求長を通じて定義することができます。すると自然に、楕円やレムニスケートなど、さまざまな曲線の求長積分を考えたいくなります。楕円関数は当初、アーベルにより第一種楕円積分の逆関数として捉えられ、その後リーマンとワイエルシュトラスにより解析性と二重周期性によって楕円関数が定義づけられるようになりました。

このように楕円関数は初めは解析学的な対象でしたが、たとえば楕円関数から自然にリーマン面が定義されるように、代数・幾何・解析と様々な分野と密接に関係していることがわかります。数学が互いに関係し合っている様子を楕円関数を通じて少しでも感じてもらえればと思います。

## 2 講演概要

楕円関数は当初、楕円積分の逆関数として定義された。楕円積分を考えていくとその逆関数は周期的な関数であることがわかる。すると、与えられた周期を持つ関数が存在するか、という問いが生じる。これはワイエルシュトラスの  $\wp$  関数の構成によって解答がなされる。本講演ではまず三角関数が積分によって定義されることと、そこから自然に楕円積分を考えることができることを見る。これにより楕円関数を二重周期を持つ有理型関数として定義する。次に与えられた周期を持つ  $\wp$  関数を構成し、その性質を調べる。その過程で楕円関数が幾何学的な対象であることも述べたい。

ある程度の解説はするつもりだが、数学科 2, 3 年生程度の予備知識を仮定したい\*<sup>1</sup>。具体的にはコーシーの積分公式や留数定理などの基本的な 1 変数複素関数論と、代数系の基礎的な用語についてである。また、多様体の定義などを知っておくとより分かりやすくなるかもしれない。

講演内容はおよそ三宅 [5], 梅村 [9], Hurwitz-Courant [2] による。楕円関数論の歴史については高瀬 [7, 8] などが面白いので一読をお勧めする。

---

\* 大阪大学自主ゼミ会 阪ゼミ会 <https://sites.google.com/site/ouvsemi/>

\*<sup>1</sup> ただし予備知識がなくとも雰囲気は伝わるように注意するつもりです。

## 参考文献

- [1] L. V. Ahlfors. 複素解析. 現代数学社, 1982. [訳:笠原乾吉].
- [2] A. Hurwitz and R. Courant. 楕円関数論. シュプリンガー数学クラシックス, 第2巻. 丸善出版, 2012. [訳:足立恒雄, 小松啓一].
- [3] 笠原乾吉. 複素解析: 1変数解析関数. ちくま学芸文庫, [カ-41-1]. 筑摩書房, 2016.
- [4] 今野一宏. リーマン面と代数曲線. 共立講座 数学の輝き, No. 2. 共立出版, 2015.
- [5] 三宅克哉. 楕円関数概観: 楕円積分から虚数乗法まで. 共立出版, 2015.
- [6] 小木曾啓示. 代数曲線論. 講座数学の考え方, No. 18. 朝倉書店, 2002.
- [7] 高瀬正仁. 楕円関数論形成史叙述の試み: 「楕円積分」と「超越的なもの」をめぐって (数学史の研究). 数理解析研究所講究録, Vol. 1787, pp. 221–232, apr 2012.
- [8] 高瀬正仁. リーマンと代数関数論: 西欧近代の数学の結節点. 東京大学出版会, 2016.
- [9] 梅村浩. 楕円関数論: 楕円曲線の解析学. 東京大学出版会, 2000.