感度分析とロバスト性

発達科学部4年

Ⅰ部

・学習動機
・数理モデリング
・力学系
・ゲーム理論

Ⅱ部

・ファイブ･ステップ法
・最適化問題を解く

Ⅲ部

・感度分析
・ロバスト性

目標

数理モデリング、力学系、ゲーム理論に興味をもってもらう。

Ⅰ部

学習動機

戦国を数学したい

軍拡競争

→数理モデル、力学系

外交、戦略

→ゲーム理論

Ⅰ部

数理モデリング

戦争がいつ起きるかを予測することに、このようなモデルを用いることは無理がある。

例.　軍備競争

$x(t), y(t)$: A国、B国の戦力的ポテンシャル（軍事力）

仮定1:xの増加率はyのレベルに比例する。 ⇒ $\frac{dx}{dt} = ky$

仮定2:軍備の増加および維持の費用は抑制効果をもたらす。 ⇒ $\frac{dx}{dt} = ky - ax$

仮定3:A国がB国に対して抱いている不満は促進効果をもたらす。 ⇒ $\frac{dx}{dt} = ky - ax + g$

A国　$\frac{dx}{dt} = ky - ax + g$

B国　$\frac{dy}{dt} = lx - by + h$

第一次大戦、A:ドイツ、オーストリア、ハンガリー
B:フランス、ロシア
とすると良いモデルになっている

Ⅰ部

力学系

時間経過による変化を表す微分方程式の解析

A国

$$\frac{dx}{dt} = ky - ax + g$$

B国

$$\frac{dy}{dt} = lx - by + h$$

Ⅰ部

ゲーム理論‥意思決定の合理化・モデル化

戦史記録にゲーム理論を適用しただけでは、多少洗練された
『戦記物』以上の価値はないであろう

長篠の戦い（1575年）‥織田徳川連合軍3万8千と武田軍1万5千の軍事衝突

徳川勢の奇襲により武田軍は退路を断たれた‥

このとき、武田と織田徳川連合軍が取る戦略:

連合軍＼武田軍	突撃	守りを固める
突撃	(5,-5)	(-10,10)
守りを固める	(10,-10)	(-5,5)

ゼロサム・ゲーム

連合軍＼武田軍	突撃	守りを固める
突撃	(5,5) パ	(-10,0)
守りを固める	(10,0) パ	(-5,5) ナ

非ゼロサム・ゲーム

Ⅱ部

ファイブ・ステップ法

時は1555年、秋となり収穫を迎えた。
しかし今年は不作であり、各所で米が不足しているようである。

幸いにして若き織田信長が統治する尾張国では米は不作を免れた。

これは出世の好機、前年織田家に仕官した木下藤吉郎は主君の信長にある提案をした‥。

問題1：1変数最適化問題

あなたは主君の信長より、余剰した米を売ることで軍資金を稼ぐ主命を与えられた。

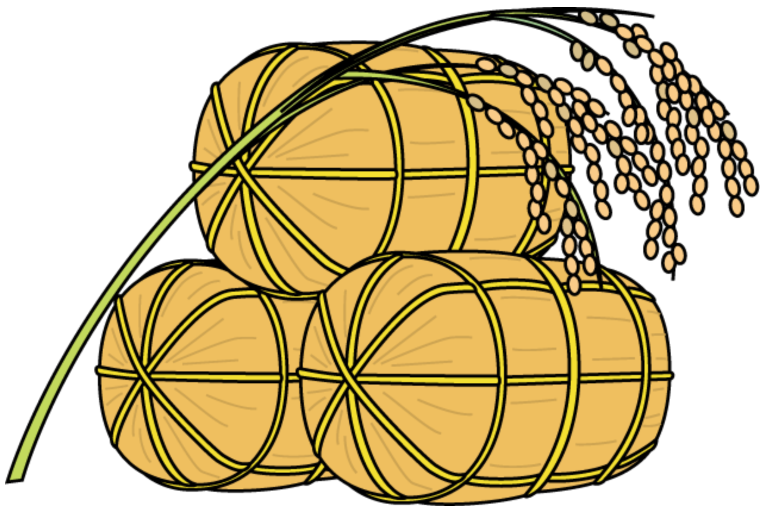
あなたが現在運用できる米は200石である。まだ収穫の途中であり、１日待つごとに新たに5石の米を運用できる。

米の維持費として１日45銭かかるとする。

市場での米１石あたりの価格は、現在65銭で、１日に1銭ずつ価格は下がっていくとする。

輸送の都合上、一度の売買ですべての米を売り払い、ただちに報告を行い得た収益を納めるものとする。

米はいつ売るべきか？



数理モデルを用いた問題解決の手続き

ファイブ・ステップ法

(1)問題設定 **変数** と **仮定** と **目的** を設定

変数：

- t:時間(日)
- w:米(石)
- p:売値(銭)
- C:t日間の米の維持費用(銭)
- R:米を売って得る収入(銭)
- P:米を売って得る利益(銭)

仮定：

$$w = 200 + 5t$$

$$p = 65 - t$$

$$C = 45t$$

$$R = p * w$$

$$P = R - C$$

目的：

$$\max P$$

(2)数理モデルの手法を選ぶ

数学上どのような問題に帰着できるか？

変数：

t:時間(日)
w:米(石)
p:売値(銭)
C:t日間の米の維持費用(銭)
R:米を売って得る収入(銭)
P:米を売って得る利益(銭)

仮定：

$w = 200 + 5t$
$p = 65 - t$
$C = 45t$
$R = p * w$
$P = R - C$

目的：

$\max P$

↓

1変数関数の最大値を求める問題

(3)モデルを定式化　**目的関数**　を設定

$$
\begin{aligned}
P &= R - C \\
&= p * w - 0.45t \\
&= (65 - t)(200 + 5t) - 45t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
&= (65 - x)(200 + 5x) - 45x
\end{aligned}
$$

の集合$S = \{x; x \geq 0\}$上での最大値を求めよ

(4)モデルを解く

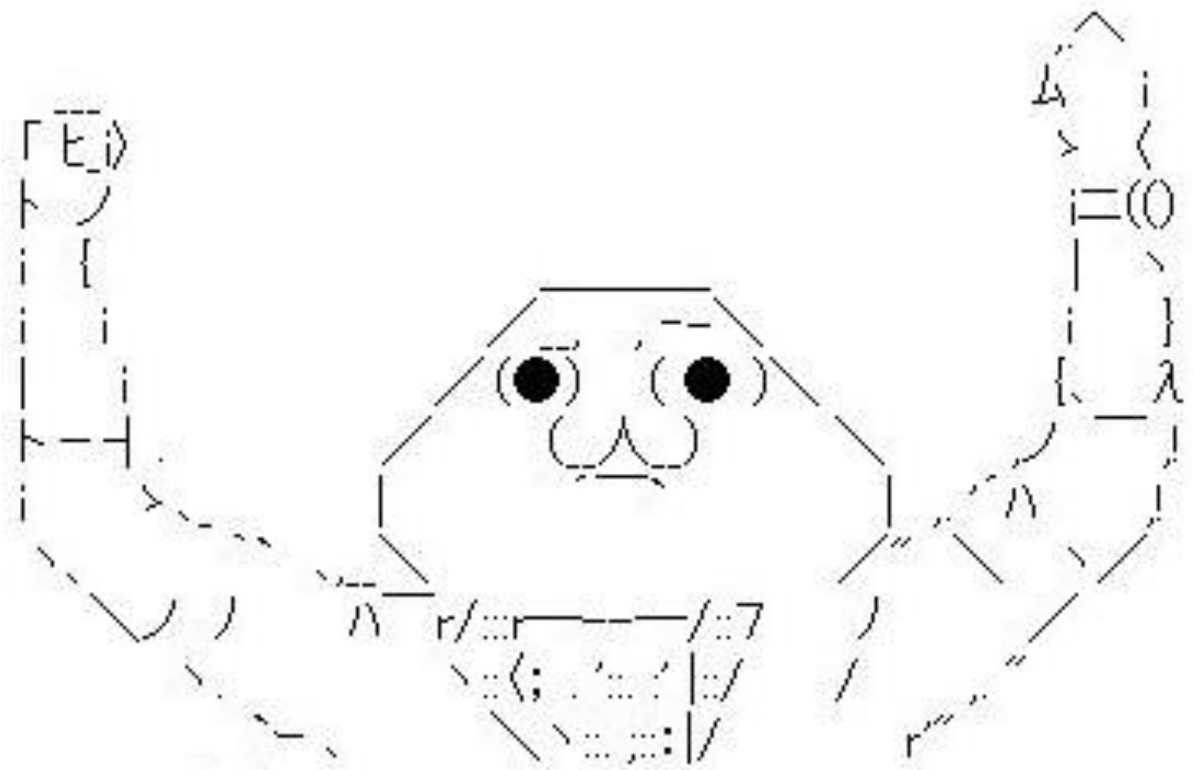
数学的解決

$y = (65 - x)(200 + 5x) - 45x\ (x \geq 0)$ の最大値

→$x = 8$で最大値13320

(5)解答を出す

結果報告



8日後に米を売り払うことで最大純益13320銭を得られる！

数理モデルを用いた問題解決の手続き

ファイブ･ステップ法

その他のモデル

多変数モデル

線形計画

動的モデル

Ⅲ部

感度分析

米売りの問題

本当か？

あなたが現在運用できる米は200石である。まだ収穫の途中であり、1日待つごとに新たに5石の米を運用できる。

米の維持費として1日45銭かかるとする。

市場での米1石あたりの価格は、現在65銭で、1日に1銭ずつ価格は下がっていくとする。 本当か？

輸送の都合上、一度の売買ですべての米を売り払い、ただちに報告を行い得た収益を納めるものとする。

米はいつ売るべきか？

感度分析(1)

価格下落率の分析

変数:

t:時間(日)
w:米(石)
p:売値(銭)
C:t日間の米の維持費用(銭)
R:米を売って得る収入(銭)
P:米を売って得る利益(銭)

仮定:

$w = 200 + 5t$
$p = 65 - t$
$C = 45t$
$R = p * w$
$P = R - C$

目的関数: $y = (65 - x)(200 + 5x) - 45x \ (x \geq 0)$

↓ 価格下落率を1銭/日からr銭/日に変更

目的関数: $y = (65 - rx)(200 + 5x) - 45x \ (x \geq 0)$

→ $x = \dfrac{28 - 20r}{r}$ において最大

実行可能領域$x \geq 0$より$0 < r \leq 1.4$

r(銭/日)	x(日)
0.8	15.0
0.9	11.1
1.0	8.0
1.1	5.5
1.2	3.3

rが10%減少するとxは39%増

10%増加すると32%減

感度分析(2)

収穫の分析

変数:

t:時間(日)
w:米(石)
p:売値(銭)
C:t日間の米の維持費用(銭)
R:米を売って得る収入(銭)
P:米を売って得る利益(銭)

仮定:

$w = 200 + 5t$
$p = 65 - t$
$C = 45t$
$R = p * w$
$P = R - C$

目的関数: $y = (65 - x)(200 + 5x) - 45x \ (x \geq 0)$

収穫を5石/日からg石/日に変更

目的関数: $y = (65 - x)(200 + gx) - 45x \ (x \geq 0)$

→ $x = \dfrac{65g - 245}{2g}$ において最大

実行可能領域$x \geq 0$より$g \geq 3.77$

gが20%増加するとxは51%増

20%減少すると76%減

g(石/日)	x(日)
4	1.9
5	8.0
6	12.1
7	15
8	17.2

感度分析(3)

誤差が生じた際の影響力の評価

価格下落率r

rが10%増加するとxは39%減

10%減少すると32%増

収穫g

gが20%増加するとxは51%増

20%減少すると76%減

値に誤差があったとき、xにより大きな影響を及ぼすのはどっちだ？

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta r}{r}}, \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta g}{g}}$$

を比較

<u>感度分析(3)</u>　誤差が生じた際の影響力の評価

$$\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta r}{r}}, \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta g}{g}}$$ を比較

それぞれで、$\Delta r \to 0, \Delta g \to 0$としてみる

$S(x,r) = \frac{dx}{dr} \cdot \frac{r}{x}, S(x,g) = \frac{dx}{dg} \cdot \frac{g}{x}$　を、それぞれ、xのrに対する**感度**、xのgに対する**感度**と呼ぶ

実際に計算・・

$$S(8,1) = -\frac{7}{2}$$

$$S(8,5) = 3.06$$

感度分析(3)　誤差が生じた際の影響力の評価

$$S(x,r) = -\frac{7}{2}$$

→rが2%減るとxは7%増える

$$S(x,g) = 3.06$$

→gが10%増えるとxは30.6%増える

感度はどのような意味をもつか？

→単位が%の微分係数に対応

目安

感度分析(3)　実際に使ってみる

$S(x,r) = -\frac{7}{2}$　→rが2%減るとxは7%増える

$S(x,g) = 3.06$　→gが10%増えるとxは30.6%増える

価格下落率が予想できないが、0.9から1.1銭/日の間であるように予測される

→r=1.0の想定から10%以内のズレ

最適販売日数のズレは35%程度

→5日目と11日目のどこかで売ることになる

$S(y,r), S(y,g)$も計算して評価できる（が計算が面倒なので省略）

Ⅲ部

モデルのロバスト性 完璧なモデルなどない

モデルから得られる答えが完璧に正しいわけではないが、現実の状況で使う分には十分なほどに正解に近い

→数理モデルはロバストである

↓ どういうときにロバストに近づくか

感度が控えめになっているモデル → 誤差があっても安心して使える

Caution　感度もモデル依存

今回価格下落や収穫は直線近似

指数近似に変えたりすることで感度も変わる

参考文献

『微分方程式で数学モデルを作ろう』日本評論社
『力学系入門ー微分方程式からカオスまでー』共立出版
『国際政治の数理・計量分析入門』東京大学出版会
『数理モデリング入門ーファイブ・ステップ法』共立出版
『検証長篠合戦』吉川弘文館

Ⅰ部

・学習動機
・数理モデリング
・力学系
・ゲーム理論

Ⅱ部

・ファイブ・ステップ法
・最適化問題を解く

Ⅲ部

・感度分析
・ロバスト性