

感度分析とロバスト性

発達科学部4年

I 部

- ・学習動機
- ・数理モデリング
- ・力学系
- ・ゲーム理論

II 部

- ・ファイブ・ステップ法
- ・最適化問題を解く

III 部

- ・感度分析
- ・ロバスト性

目標

数理モデリング、力学系、ゲーム理論に興味をもってもらう。

I 部

学習動機

戦国を数学したい

軍拡競争

→数理モデル、力学系



外交、戦略

→ゲーム理論

I 部

数理モデリング

戦争がいつ起きるかを予測することに、このようなモデルを用いることは無理がある。

例. 軍備競争

$x(t), y(t)$: A国、B国の戦力的ポテンシャル(軍事力)

仮定1: x の増加率は y のレベルに比例する。



$$\frac{dx}{dt} = ky$$

仮定2: 軍備の増加および維持の費用は抑制効果をもたらす。



$$\frac{dx}{dt} = ky - ax$$

仮定3: A国がB国に対して抱いている不満は促進効果をもたらす。



$$\frac{dx}{dt} = ky - ax + g$$

$$\text{A国} \quad \frac{dx}{dt} = ky - ax + g$$

$$\text{B国} \quad \frac{dy}{dt} = lx - by + h$$

第一次大戦、A:ドイツ、オーストリア、ハンガリー

B:フランス、ロシア

とすると良いモデルになっている

I 部

力学系

時間経過による変化を表す微分方程式の解析

$$\text{A国} \quad \frac{dx}{dt} = ky - ax + g$$

$$\text{B国} \quad \frac{dy}{dt} = lx - by + h$$

I 部

ゲーム理論・・・意思決定の合理化・モデル化

戦史記録にゲーム理論を適用しただけでは、多少洗練された『戦記物』以上の価値はないであろう

長篠の戦い(1575年)・・・織田徳川連合軍3万8千と武田軍1万5千の軍事衝突

徳川勢の奇襲により武田軍は退路を断たれた・・・



このとき、武田と織田徳川連合軍が取る戦略:

| 武田軍 連合軍 | 突撃 | 守りを固める |
|------------|----------|----------|
| 突撃 | (5,-5) | (-10,10) |
| 守りを固める | (10,-10) | (-5,5) |

ゼロサム・ゲーム

| 武田軍 連合軍 | 突撃 | 守りを固める |
|------------|---------------------|---------------------|
| 突撃 | (5,5) ^パ | (-10,0) |
| 守りを固める | (10,0) ^パ | (-5,5) ⁺ |

非ゼロサム・ゲーム

Ⅱ 部

ファイブ・ステップ法

時は1555年、秋となり収穫を迎えた。

しかし今年は不作であり、各所で米が不足しているようである。

幸いにして若き織田信長が統治する尾張国では米は不作を免れた。

これは出世の好機、前年織田家に仕官した木下藤吉郎は主君の信長にある提案をした。。。

問題1: 1変数最適化問題

あなたは主君の信長より、余剰した米を売ることによって軍資金を稼ぐ主命を与えられた。

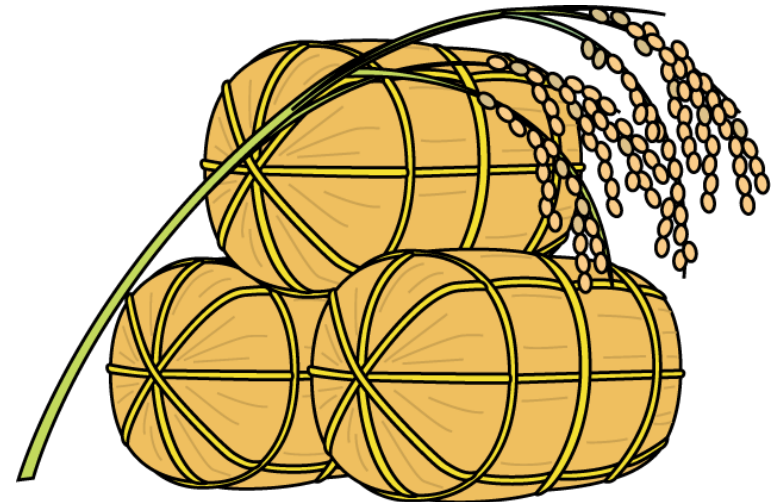
あなたが現在運用できる米は200石である。まだ収穫の途中であり、1日待つごとに新たに5石の米を運用できる。

米の維持費として1日45銭かかるとする。

市場での米1石あたりの価格は、現在65銭で、1日に1銭ずつ価格は下がっていくとする。

輸送の都合上、一度の売買ですべての米を売り払い、ただちに報告を行い得た収益を納めるものとする。

米はいつ売るべきか？



数理モデルを用いた問題解決の手続き

ファイブ・ステップ法



(1)問題設定 **変数** と **仮定** と **目的** を設定

変数:

t:時間(日)

w:米(石)

p:売値(銭)

C:t日間の米の維持費用(銭)

R:米を売って得る収入(銭)

P:米を売って得る利益(銭)

仮定:

$$w = 200 + 5t$$

$$p = 65 - t$$

$$C = 45t$$

$$R = p * w$$

$$P = R - C$$

目的:

$$\max P$$

(2)数理モデルの手法を選ぶ

数学上どのような問題に帰着できるか？

変数:

t:時間(日)

w:米(石)

p:売値(銭)

C:t日間の米の維持費用(銭)

R:米を売って得る収入(銭)

P:米を売って得る利益(銭)

仮定:

$$w = 200 + 5t$$

$$p = 65 - t$$

$$C = 45t$$

$$R = p * w$$

$$P = R - C$$

目的:

$$\max P$$

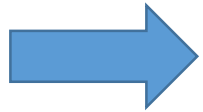


1変数関数の最大値を求める問題

(3)モデルを定式化

目的関数 を設定

$$\begin{aligned}P &= R - C \\ &= p * w - 0.45t \\ &= (65 - t)(200 + 5t) - 45t\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y &= f(x) \\ &= (65 - x)(200 + 5x) - 45x\end{aligned}$$

の集合 $S = \{x; x \geq 0\}$ 上での最大値を求めよ

(4)モデルを解く

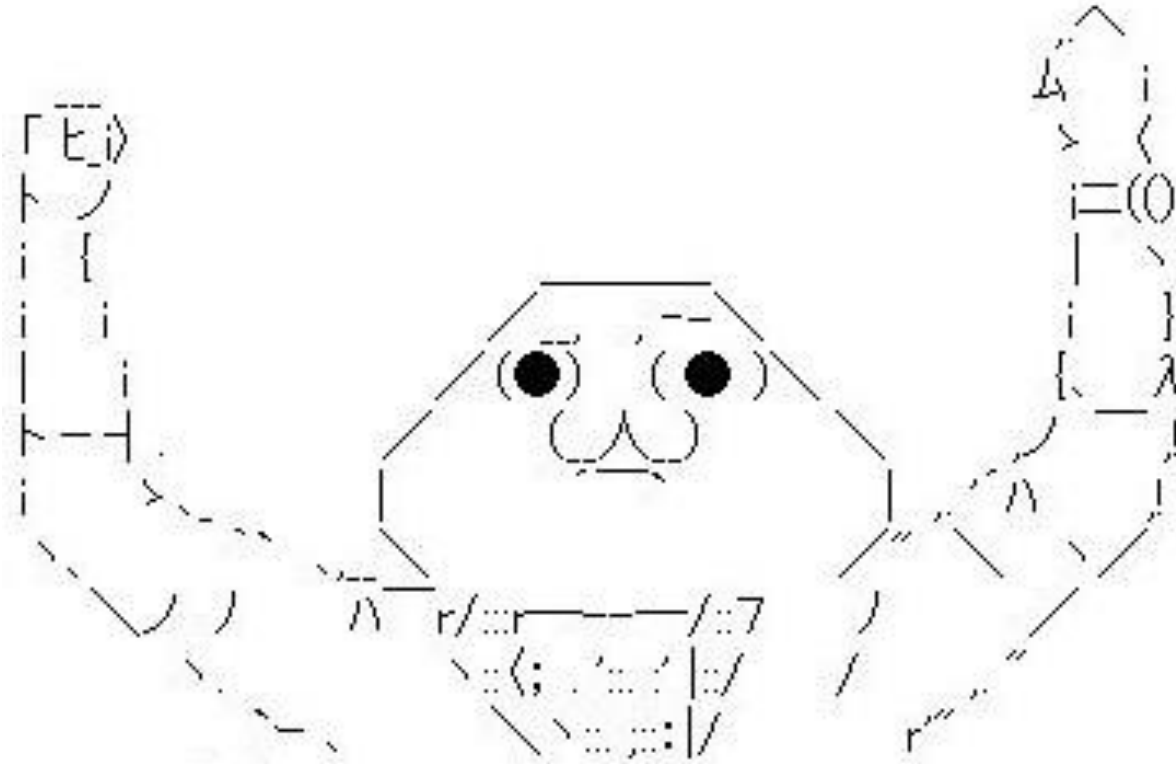
数学的解決

$y = (65 - x)(200 + 5x) - 45x$ ($x \geq 0$) の最大値

→ $x = 8$ で最大値13320

(5)解答を出す

結果報告



8日後に米を売り払うことで最大純益13320銭を得られる！

数理モデルを用いた問題解決の手続き

ファイブ・ステップ法



その他のモデル

多変数モデル

線形計画

動的モデル

Ⅲ部

感度分析

米売りの問題

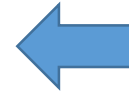
あなたが現在運用できる米は200石である。まだ収穫の途中であり、1日待つごとに新たに5石の米を運用できる。

本当か？



米の維持費として1日45銭かかるとする。

市場での米1石あたりの価格は、現在65銭で、1日に1銭ずつ価格は下がっていくとする。



本当か？

輸送の都合上、一度の売買ですべての米を売り払い、ただちに報告を行い得た収益を納めるものとする。

米はいつ売るべきか？

感度分析(1)

価格下落率の分析

変数:

t:時間(日)

w:米(石)

p:売値(銭)

C:t日間の米の維持費用(銭)

R:米を売って得る収入(銭)

P:米を売って得る利益(銭)

仮定:

$$w = 200 + 5t$$

$$p = 65 - t$$

$$C = 45t$$

$$R = p * w$$

$$P = R - C$$

目的関数: $y = (65 - x)(200 + 5x) - 45x \ (x \geq 0)$



価格下落率を1銭/日からr銭/日に変更

目的関数: $y = (65 - rx)(200 + 5x) - 45x \ (x \geq 0)$

$$\rightarrow x = \frac{28 - 20r}{r} \text{ において最大}$$

実行可能領域 $x \geq 0$ より $0 < r \leq 1.4$

rが10%減少するとxは39%増
10%増加すると32%減

| r(銭/日) | x(日) |
|--------|------|
| 0.8 | 15.0 |
| 0.9 | 11.1 |
| 1.0 | 8.0 |
| 1.1 | 5.5 |
| 1.2 | 3.3 |

感度分析(2)

収穫の分析

変数:

t:時間(日)

w:米(石)

p:売値(銭)

C:t日間の米の維持費用(銭)

R:米を売って得る収入(銭)

P:米を売って得る利益(銭)

仮定:

$$w = 200 + 5t$$

$$p = 65 - t$$

$$C = 45t$$

$$R = p * w$$

$$P = R - C$$

目的関数: $y = (65 - x)(200 + 5x) - 45x \ (x \geq 0)$



収穫を5石/日からg石/日に変更

目的関数: $y = (65 - x)(200 + gx) - 45x \ (x \geq 0)$

$\rightarrow x = \frac{65g - 245}{2g}$ において最大

実行可能領域 $x \geq 0$ より $g \geq 3.77$

gが20%増加するとxは51%増
20%減少すると76%減

| g(石/日) | x(日) |
|--------|------|
| 4 | 1.9 |
| 5 | 8.0 |
| 6 | 12.1 |
| 7 | 15 |
| 8 | 17.2 |

感度分析(3)

誤差が生じた際の影響力の評価

価格下落率 r

r が10%増加すると x は39%減
10%減少すると32%増

収穫 g

g が20%増加すると x は51%増
20%減少すると76%減

値に誤差があったとき、 x により大きな影響を及ぼすのはどっちだ？

→ $\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta r}{r}}, \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta g}{g}}$ を比較

感度分析(3)

誤差が生じた際の影響力の評価

$$\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta r}{r}}, \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta g}{g}} \quad \text{を比較}$$

それぞれで、 $\Delta r \rightarrow 0, \Delta g \rightarrow 0$ としてみる

$$S(x, r) = \frac{dx}{dr} \cdot \frac{r}{x}, S(x, g) = \frac{dx}{dg} \cdot \frac{g}{x} \quad \text{を、それぞれ、xのrに対する感度、xのgに対する感度と呼ぶ}$$

実際に計算・・・

$$S(8,1) = -\frac{7}{2}$$

$$S(8,5) = 3.06$$

感度分析(3)

誤差が生じた際の影響力の評価

$$S(x, r) = -\frac{7}{2} \quad \rightarrow r \text{が} 2\% \text{減ると} x \text{は} 7\% \text{増える}$$

$$S(x, g) = 3.06 \quad \rightarrow g \text{が} 10\% \text{増えると} x \text{は} 30.6\% \text{増える}$$

感度はどのような意味をもつか？

→単位が%の微分係数に対応

目安

感度分析(3)

実際に使ってみる

$$S(x, r) = -\frac{7}{2} \quad \rightarrow r \text{が} 2\% \text{減ると} x \text{は} 7\% \text{増える}$$
$$S(x, g) = 3.06 \quad \rightarrow g \text{が} 10\% \text{増えると} x \text{は} 30.6\% \text{増える}$$

価格下落率が予想できないが、0.9から1.1銭/日の間であるように予測される

→ $r=1.0$ の想定から10%以内のズレ



最適販売日数のズレは35%程度

→5日目と11日目のどこかで売ることになる

$S(y, r), S(y, g)$ も計算して評価できる(が計算が面倒なので省略)

Ⅲ部

モデルのロバスト性 完璧なモデルなどない

モデルから得られる答えが完璧に正しいわけではないが、現実の状況で使う分には十分なほどに正解に近い

→数理モデルはロバストである



どういうときにロバストに近づくか

感度が控えめになっているモデル → 誤差があっても安心して使える

Caution 感度もモデル依存
今回価格下落や収穫は直線近似
指数近似に変えたりすることで感度も変わる

参考文献

- 『微分方程式で数学モデルを作ろう』日本評論社
- 『力学系入門—微分方程式からカオスまで—』共立出版
- 『国際政治の数理・計量分析入門』東京大学出版会
- 『数理モデリング入門—ファイブ・ステップ法』共立出版
- 『検証長篠合戦』吉川弘文館



I 部

- ・学習動機
- ・数理モデリング
- ・力学系
- ・ゲーム理論

II 部

- ・ファイブ・ステップ法
- ・最適化問題を解く

III 部

- ・感度分析
- ・ロバスト性